# Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων, Κλασικη Μηχανικη, Ομαδα Α, διδασκων: Μ. Ξενος

**A**

26/09/2012

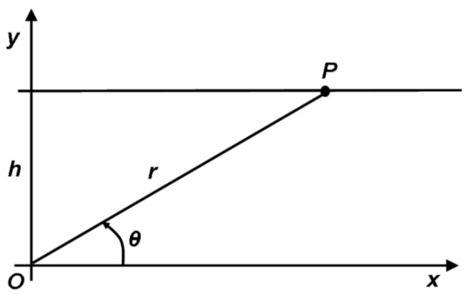
## Θέματα

**1.** (α) Σωστό ή Λάθος, αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας, (1.2 μονάδες).
• Η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική όταν το $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.
• Η επιτάχυνση υλικού σημείου σε φυσικές συντεταγμένες έχει δύο συνιστώσες, την επιτρόχιο και την κεντρομόλο επιτάχυνση.
• Ένα σύστημα λέγεται κλειστό όταν το άθροισμα των εσωτερικών του δυνάμεων είναι μηδέν.
• Αν η ολική ροπή του συστήματος είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
• Όταν η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική, το έργο της δεν εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του υλικού σημείου αλλά μόνο από το δρόμο που θα ακολουθήσει.
• Οι ελκτικές δυνάμεις που είναι αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης και οι δυνάμεις ελατηρίου είναι δύο παραδείγματα κεντρικών δυνάμεων.
(β) Οι εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου δίνονται από τις σχέσεις: $x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 + 1$.
$(i)$ Να γραφεί η εξίσωση τροχιάς του υλικού σημείου ως $y = y(x)$ και να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του τη χρονική στιγμή $t = 1s$. $(ii)$ Να υπολογιστούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή, (1.3 μονάδες).

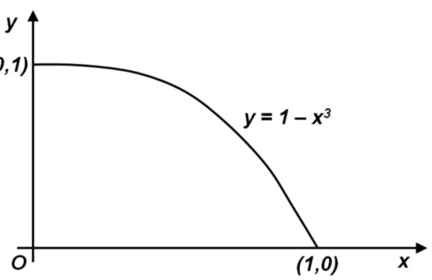
**2.** (α) Αν η ταχύτητα υλικού σημείου, $P$, σε πολικές συντεταγμένες είναι: $\vec{u} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0$, να βρεθεί το διάνυσμα της επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}$, σε πολικές συντεταγμένες, όπου $\vec{r}_0 = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0$ και $\vec{\theta}_0 = -\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα, (1.25 μονάδες).
(β) Υλικό σημείο, $P$, κινείται σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των $x$ (**σχήμα 1**). Η ευθεία βρίσκεται σε απόσταση, $h$, από τον άξονα των $x$. Η γωνιακή ταχύτητα, $\omega$, του υλικού σημείου είναι σταθερή ($\omega = d\theta/dt =$ σταθερή). Ζητούνται οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του σε πολικές συντεταγμένες, (1.25 μονάδες).

**3.** (α) Αν $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι το αρχικό και τελικό διανύσματα θέσης με $\vec{r}_1 = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0$ και $\vec{r}_2 = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0$ συντηρητικής δύναμης $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, να δειχθεί ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη μια θέση στην άλλη είναι: $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$, (1.0 μονάδα).
(β) Υλικό σημείο μάζας $m$, κινείται με την επίδραση του βάρους $-mg\vec{z}_0$ στο επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ όπου $\alpha, \beta, \gamma$ σταθερές και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $O(0, 0, 0)$ και δεν έχει αρχική ταχύτητα. $(i)$ Να βρεθούν οι εξισώσεις $Lagrange$ α' είδους. $(ii)$ Να ολοκληρωθούν και να βρεθεί η λύση που αντιστοιχεί στις δοθείσες αρχικές συνθήκες, (1.5 μονάδα).

**4.** (α) Να δειχθεί ότι σε κλειστό σύστημα $N$ υλικών σημείων: $(i)$ η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή και $(ii)$ το κέντρο μάζας του κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ή είναι ακίνητο.
Είναι γνωστό ότι: $\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$, $M$ είναι η μάζα του συστήματος, $\vec{r}_s$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος, (1.0 μονάδα).
(β) Δίνεται η ομογενής επίπεδη επιφάνεια (**σχήμα 2**) με όρια $y = 0$, $x = 0$ και $y = 1 - x^3$, να προσδιοριστεί το κέντρο μάζας της επιφάνειας, (1.5 μονάδες).




(α') Σχημα 1




(β') Σχημα 2

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. **Καλη Επιτυχια!**

**B**

Πανεπιστημιο Ιωαννινων, Τμημα Μαθηματικων,
Κλασικη Μηχανικη, Ομαδα Β, διδασκων: Μ. Ξενος

26/09/2012

## Θέματα

**1.** (α) Σωστό ή Λάθος, αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας, (1.2 μονάδες).

• Σε υλικό σημείο $i$, συστήματος $N$ υλικών σημείων, δεν επιδρούν οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

• Αν η ολική ροπή του συστήματος είναι μηδέν, η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

• Ένα σύστημα λέγεται κλειστό όταν το άθροισμα των εσωτερικών του δυνάμεων είναι μηδέν.

• Οι ελκτικές δυνάμεις που είναι αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου της απόστασης και οι δυνάμεις ελατηρίου είναι δύο παραδείγματα κεντρικών δυνάμεων.

• Όταν η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική, το έργο της δεν εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του υλικού σημείου αλλά μόνο από το δρόμο που θα ακολουθήσει.

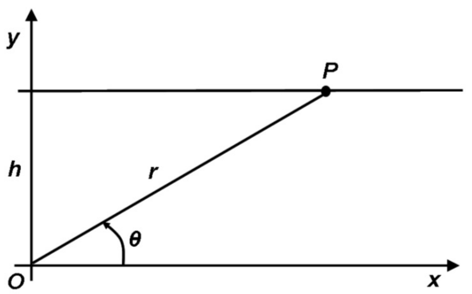
• Η επιτάχυνση υλικού σημείου σε φυσικές συντεταγμένες έχει δύο συνιστώσες, την επιτρόχιο και την κεντρομόλο επιτάχυνση.

(β) Οι εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου δίνονται από τις σχέσεις: $x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 + 1$.
$(i)$ Να γραφεί η εξίσωση τροχιάς του υλικού σημείου ως $y = y(x)$ και να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του τη χρονική στιγμή $t = 1s$. $(ii)$ Να υπολογιστούν η επιτρόχια και η κεντρομόλος επιτάχυνση την ίδια χρονική στιγμή, (1.3 μονάδες).

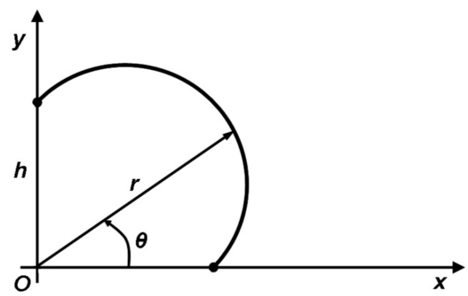
**2.** (α) Αν η ταχύτητα υλικού σημείου, $P$, σε πολικές συντεταγμένες είναι: $\vec{u} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0$, να βρεθεί το διάνυσμα της επιτάχυνσης, $\vec{\alpha}$, σε πολικές συντεταγμένες, όπου $\vec{r}_0 = \cos\theta\vec{x}_0 + \sin\theta\vec{y}_0$ και $\vec{\theta}_0 = -\sin\theta\vec{x}_0 + \cos\theta\vec{y}_0$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα, (1.25 μονάδες).
(β) Υλικό σημείο, $P$, κινείται σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των $x$ (**σχήμα 1**). Η ευθεία βρίσκεται σε απόσταση, $h$, από τον άξονα των $x$. Η γωνιακή ταχύτητα, $\omega$, του υλικού σημείου είναι σταθερή ($\omega = d\theta/dt =$ σταθερή). Ζητούνται οι συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσής του σε πολικές συντεταγμένες, (1.25 μονάδες).

**3.** (α) Αν $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι το αρχικό και τελικό διανύσματα θέσης με $\vec{r}_1 = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 + z_1\vec{z}_0$ και $\vec{r}_2 = x_2\vec{x}_0 + y_2\vec{y}_0 + z_2\vec{z}_0$ συντηρητικής δύναμης $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, να δειχθεί ότι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη μια θέση στην άλλη είναι: $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$, (1.0 μονάδα).
(β) $(i)$ Να δειχθεί ότι η δύναμη: $\vec{F} = (3y - 2x + z^2)\vec{x}_0 + (3x + 2y)\vec{y}_0 + 2xz\vec{z}_0$ είναι συντηρητική, $(ii)$ αν είναι συντηρητική να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού της και $(iii)$ να υπολογιστεί το έργο, $W$ της δύναμης $\vec{F}$ από το σημείο $A(0, 0, 0)$ έως το σημείο $B(1, 2, 3)$, (1.5 μονάδα).

**4.** (α) Να δειχθεί ότι σε κλειστό σύστημα $N$ υλικών σημείων: $(i)$ η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή και $(ii)$ το κέντρο μάζας του κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ή είναι ακίνητο.
Είναι γνωστό ότι: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$, $M$ είναι η μάζα του συστήματος, $\vec{r}_s$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος, (1.0 μονάδα).
(β) Να βρεθεί το κέντρο μάζας της ομογενούς καμπύλης, η οποία είναι το τόξο του κύκλου $r = 2\sin\theta + 4\cos\theta$ από $\theta = 0$ έως $\theta = \pi/2$, **σχήμα 2**, (1.5 μονάδες).




(α΄) Σχημα 1




(β΄) Σχημα 2

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. **Καλη Επιτυχια!**